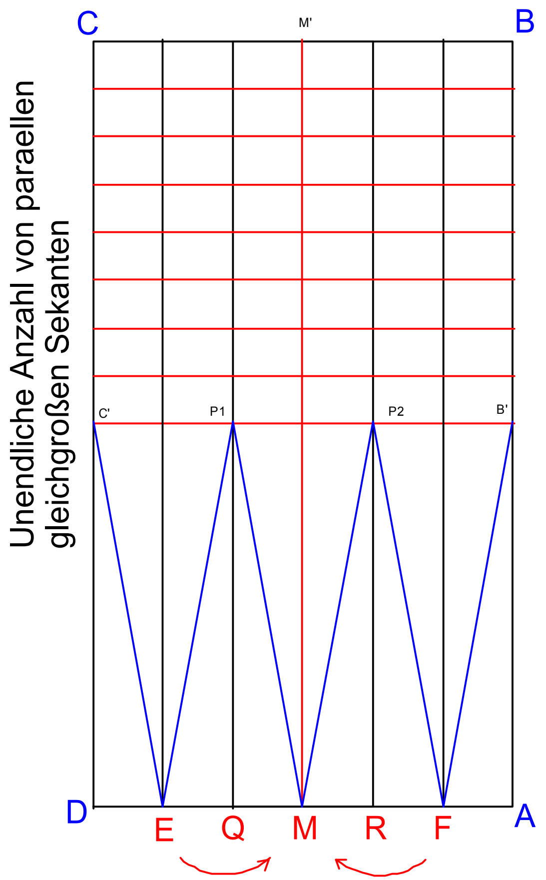
Figur 1

Nur mit Zirkel und Lineal



Karel Markowski

Die geometrische Lösung der Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal

Bevor man über ein Buch lacht, muss man es gelesen und verstanden haben. Es ist nur ein Zeichen von Dummheit, vor dem Gelesen haben in einer heiteren Stimmung der Überlegenheit über das Ungelesene zu sein, von Begriffenheit haben gar nicht zu reden …..

Darstellung der Problemlage

Im Viereck ABCD des nachfolgend definierten Modus gibt es unendlich viele Winkel, die alle geometrisch nur mit Zirkel und Lineal durch drei geteilt sind. Auf Grund der Galoistheorie (1831) gilt die Dreiteilung eines Winkels nur mit Zirkel und Lineal als unlösbar. Gemäß Galois müssen im Viereck ABCD alle Winkel durch drei ungeteilt sein. Aber im Viereck ABCD gibt es keinen einzigen durch drei ungeteilten Winkel. Im Viereck ABCD sind alle Winkel durch drei geteilt. Die Geometrie der Winkeldreiteilung ist eine ganz andere Problemlage, als sie aus Aspekten der Theorie von Galois heraus beschrieben ward.

Figur 1: <u>Gestreckte Sekante B'C' aus drei Drittelsekanten</u>

Definiert ist ein Viereck ABCD, in welchem immer AD = BC und AB = CD sei. Es ist in sechs gleich große Streifen geteilt, die parallel zu AB und CD sind.

Die Mitte M von AD ist der gemeinsame Schnittpunkt der Schenkel aller Winkel und MM‘ die gemeinsame Winkelhalbierende von ihnen. Es sei immer parallel zu AD und BC, und B'C‘ die Summe der drei Sekanten.

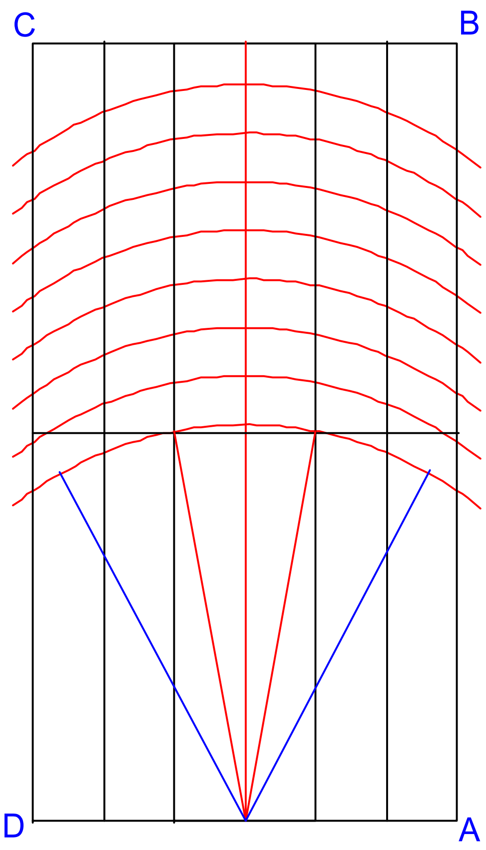
B'C‘ = B'P1 + P1P2 + C'P2

B'P1 = P1P2 = C'P2

(miteinander als Gerade)

Figur 2

Unendlich viel parallele Kurven zwischen ABCD - AB'C'D



Es sei AD = BC’ = BC von konstanter Länge, dagegen seien AB und CD von beliebiger Länge.

Zwischen AD und BC sind unendlich viele Geraden B’C’ möglich.

Die drei Sekanten B’P1 und P1P2 und P2C’ addieren sich zur Gerade B’C’ durch den Winkel $\cos \alpha = 1$.

Das Dreieck MP1P2 ist kongruent dem Dreieck FB‘P1 und EP2C‘ und entspricht vollkommen dem durch drei geteilten Dreieck mit dem Drittel des Winkels zwischen den Schenkeln MP1 und MP2.

Jede der unendlich möglichen konstanten Strecken B’C‘ vollbringt die gleiche vollkommene Teilung in Gestalt des Drittelwinkels MP1P2, daher gibt es im Viereck ABCD, durch diesen Modus **keinen** Winkel, der nicht fehlerfrei durch drei geteilt.

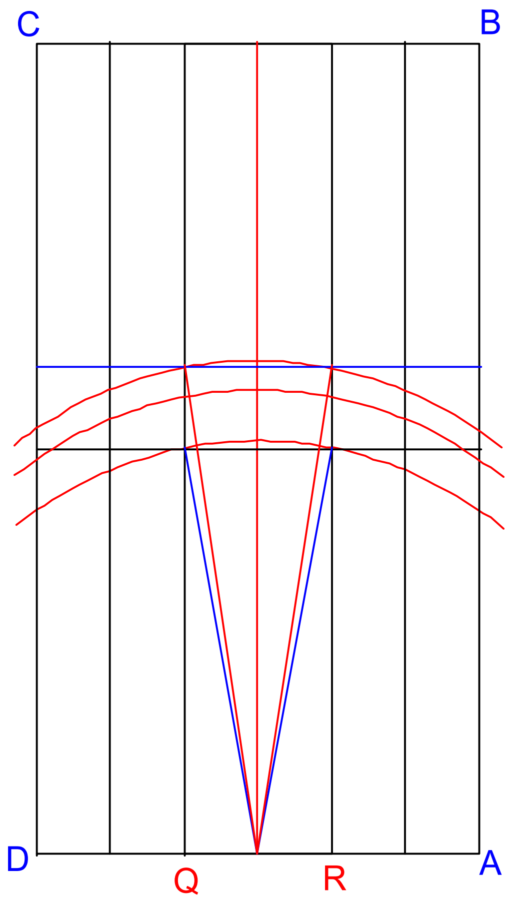
<u>**Figur 2:** Gewinkelte Drittelsekanten gleicher Länge</u>

Jeder Schnittpunkt eines beliebigen Kreisbogens um M mit den Geraden RP2 und QP1 bedingt die Strecke P1’ P2’ als Sekante, welche genau und immer ein Drittel der Sekante BC ist. Das beliebige Dreieck MP1’P2’ ist immer das geometrisch vollendete Drittel des dreigeteilten Winkels.

Figur 2 ist nur ein anders dargestellter Variant von Figur 1.

Figur 3

Der gesuchte Winkel entspringt aus einer der Kurven



Figur 3: <u>Gewinkelte gleich lange Drittelsekanten unter dem gemeinsamen Kreisbogen</u>

Da die Dreiecke MP1P2 durch ihre Beliebigkeit immer kongruent mit den Dreiecken FB'P1 und EP2C' der dargestellten Varianten des einen Problems sind, ergeben sich unter einem gemeinsamen Kreisbogen immer drei gleichlange Drittelsekanten. Sie können mit dem Zirkel angetragen werden um die jeweiligen Punkte P1' und P2'.

Sekanten

In den Figuren 1-5 ist das einfache geometrische Problem der Dreiteilung eines Winkels nur mit Zirkel und Lineal als Sekantenproblem dargestellt. Alle Winkel haben die gleich lange dreigeteilte Sekante. Es gibt im Viereck ABCD unendlich viele Winkel mit der stets gleichen

Sekante = AD = BC = AR + RQ + QD = B' P2 + P1P2 + P1C'

Variante 1:

Die gestreckte Sekante B'C' aller Winkel ist gleich.

Variante 2:

Die gewinkelte Sekante unter gleichen Kreisbögen aller Winkel gleicher Dimension

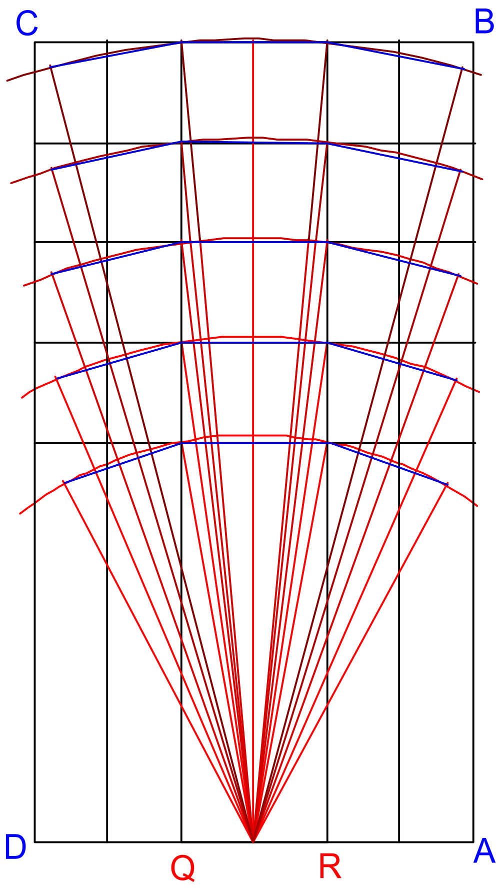
und

die Summe der Drittelsekanten ist absolut gleich der Länge der gestreckten Sekante CB. Und dies auch in

Variante 3.

Figur 4

Kein nichtgedrittelter Winkel



Figur 4: Alle dreigeteilten Winkel haben denselben Winkelschnittpunkt und gleich lange Drittelsekanten

Jeder individuelle Winkel hat seinen spezifischen Kreisbogen, der immer parallel (um den Punkt M) zu allen anderen Kreisbögen ist, (Paradoxon der Parallelität aller Kreisbögen um einen gemeinsamen Mittelpunkt).

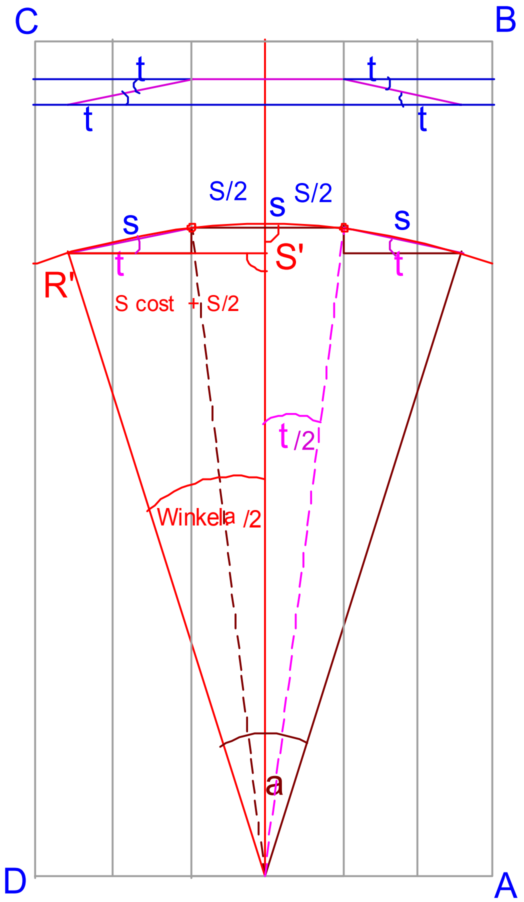
Es bedingt so die Gemeinsamkeit der drei Varianten am Viereck ABCD (dabei können die Strecken AB und BC beliebig groß sein) immer einen Winkel, der fehlerfrei durch drei geteilt worden ist. Das ist die Folge des geometrischen Modus der sechsstreifigen parallelen Teilung von ABCD. Im definierten Modus des Vierecks ABCD gibt es nur durch drei geteilte Winkel in unendlicher Anzahl. Die Drittelwinkel sind absolut gleich groß. Sowohl das Viereck als auch jeder geometrische Inhalt in ihm sind nur mit Zirkel und Lineal auf der Ebene konstruiert worden. Die Winkelteilung ist somit nur mit Zirkel und Lineal erfolgt.

Die Winkeldreiteilung ist geometrisch fehlerfrei, denn alle fehlerfrei dreigeteilten Winkel in ihrer unendlichen Anzahl haben die stets gleichgroße Drittelsekante P1'P2', welche immer genau ein Drittel der Strecke BC ist. Daher kann man nicht behaupten, dass die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal unlösbar ist, wie es erst seit Galois getan wird.

Ihre Aufgabe zur Widerlegung: Sie sind Mathematiker, akademisch qualifiziert und graduiert oder sogar noch durch eine ganz andere Qualifikation gegangen und daher prädestiniert, dieses Problem zu beurteilen. Vermutlich haben Sie es schon längst

Figur 5

Der Winkel Tau ist gleich
ein Drittel von Alpha



beurteilt und ein ganz anderes Resultat erlangt, und zwar ein solches, welches mit Galois vollends übereinstimmt. Um die obige Beweisführung zu widerlegen, müssen Sie nachweisen, dass in den insgesamt fünf Konstruktionsvarianten des in sich einheitlichen Problems dennoch Winkel vorkommen, die durch den beschriebenen geometrischen Modus nicht durch drei geteilt sind. Wenn Sie recht haben wollen, muß es diese Winkel geben, und Sie müssen diese nachweisen. Erst wenn Ihnen dieser Nachweis gelingt, haben Sie die Aussage, die Galois zugeschrieben wurde, bestätigt.

Aber bedenken Sie gleich zu Beginn: die Aussage von Galois bedeutet nicht mehr und nicht weniger als: **wenn** zur algebraischen Lösung eines Problems eine Gleichung dritten Grades gelöst werden muß, dann ist es nicht möglich, die geometrische Lösung nur mit Zirkel und Lineal zu vollbringen. Diese Aussage des Galois ist mathematisch absolut richtig. Aber aus Galois folgt deshalb im Umkehrschluß nicht, dass die Winkeldreiteilung algebraisch nur durch eine Gleichung dritten Grades lösbar ist.

Denn eine Gleichung dritten Grades beschreibt ein Problem des Raumes, sie ist eine kubische Gleichung und bedingt eine dritte Wurzel. Man kann eine dritte Wurzel nicht mit Zirkel und Lineal „ziehen“. Im Problem des Beispiels der Unlösbarkeit der Halbierung des Würfels (Delisches Problem) ist der dreidimensionale Raum untrennbar mit der dritten Wurzel verknüpft. Dieses Problem ist mit Zirkel und Lineal nicht lösbar. Eine Quadratwurzel dagegen ist mit Leichtigkeit nur mit Zirkel und

Lineal „gezogen“. Die Winkeldreiteilung aber ist nur ein Problem der Fläche, zweidimensional, daher nur Quadratproblem. Und es bestätigt sich mit Deutlichkeit als Quadratproblem, da es mindestens eine algebraische Gleichung zweiten Grades gibt, deren Lösung der genauen Winkeldreiteilung vollkommen entspricht. Und in Wirklichkeit bedarf algebraisch der Dreiteilung eines Winkels nur der Lösung einer Gleichung ersten Grades. Sie würden sich viel Mühe bei der Widerlegung ersparen, wenn Sie die sich aus Figur 5 ergebenden Konsequenzen des Algebraischen nachrechnen würden. Es ist eine Gleichung ersten Grades.

Die Figur 5

macht ersichtlich, dass **erstens** alle drei Sekanten S gleich sind, **zweitens** die Sekante S des Mitteldrittelwinkels nicht nur eine Parallele zu BC ist, sondern auch die parallele Strecke BC mit dem Winkel alpha = 0 schneidet. Darum schneiden **drittens** die Sekanten der beiden anderen Drittelwinkel unter dem gleichen Kreisbogen immer mit dem Winkel tau = alpha/3 die Parallele von BC. Die Gleichheit aller Winkel tau = alpha/3 ist bereits durch die Figur 1 eindeutig bewiesen.

In Figur 5 sind die Punkte R’ der Schnittpunkt der jeweiligen Drittelsekante S mit dem Kreisbogen von P1. Diese Drittelsekante R’P1 schneidet die Gerade B’C’ immer mit dem Winkel tau=alpha/3. Die Punkte S’ sind der jeweilige Schnittpunkt des Lotes von R’ auf die Winkelhalbierende von alpha. Die Strecke R’S’ ist die Gegenkathete des Winkels alpha/2 im Dreieck MR’S’.

Da der Winkel tau immer bei jedem dreigeteilten Winkel gleich dem Winkel alpha/3 ist und die Sekante S bei allen Winkeln immer gleich groß ist, kann der Radius, das ist nunmehr von ursprünglich drei die einzig unbekannt gebliebene Größe, als Variable mittels einer algebraischen Gleichung errechnet werden. Da von drei Unbekannten zwei als bekannt eingeführt werden, bleibt eine Unbekannte übrig, und daher wird sie errechnet durch eine lediglich lineare Gleichung.

So ist bekannt:	Die Strecke S
	Der Winkel alpha – darum immer auch
	Der Winkel tau als alpha/3
Gesucht ist:	R = Radius oder Schenkellänge

Aus der trigonometrischen Beziehung des Sinus im Dreieck MR'S' :

sin alpha/2 = Gegenkathete[= (S/2 + S(cos tau))] geteilt durch Hypotenuse (= R) →

ergibt sich der Radius R des gemeinsamen Kreisbogens aller drei Sekanten S:

R = (S/2 + S(cos tau)) : sin alpha/2

Die Berechnung der Dreiteilung dieses Winkels erfordert nur die Lösung dieser algebraischen Gleichung ersten Grades.

Diese algebraische Gleichung einer Winkelfunktion erfüllt im Viereck ABCD alles mathematische Erfordernis, um jeden dreigeteilten Winkel zu berechnen, ohne dabei eine Gleichung dritten Grades lösen zu müssen. Daher ist die Aussage des Galois innerhalb der Gruppentheorie absolut richtig, dass die geometrische Lösung eines mathematischen Problems mit Zirkel und Lineal unmöglich ist, sobald dieses algebraisch nur durch eine Gleichung dritten Grades gelöst werden kann. Aus der Gruppentheorie geht aber nicht, und schon gar nicht stringent, das Faktum hervor, daß die Dreiteilung mit Zirkel und Lineal nur die Lösung einer Gleichung dritten Grades bedingt.

Hat Galois selbst die Dreiteilung eines Winkels nur mit Zirkel und Lineal als unmöglich angesehen, dann hat er deren algebraisches und geometrisches Problem verkannt. Hat aber ein Mathematiker nach Galois die Gruppentheorie des Galois argumentiert, hat er sich wohl zu voreilig auf Galois berufen.

Es gibt eine zweite algebraische Gleichung ersten Grades, die das Problem noch effizienter löst. Es ist die Winkelbeziehung der halben Fläche des Drittelwinkels, dessen Gegenkathete gleich S/2 ist:

sin alpha/6 = S/2 : R → R = S/2 : sin alpha/6,

denn tau/2 = alpha/6 ist der halbe Drittelwinkel im mittleren dreigeteilten Dreieck.

(Anmerkung: Diese beiden Gleichungen habe ich urheberrechtlich schützen lassen. Das hat zur Folge, dass Sie, wenn Sie sie verwenden wollen, verpflichtet sind, die Lizenz zu ihrer Nutzung zu erwerben. Zu diesem Zweck wenden Sie sich bitte an den TRIGON Verlag in Potsdam.)

Zusammenfassend:

In jedem beliebig gestalteten rechtwinkligen Viereck ABCD, wenn in der Mitte der Strecke AB der Punkt M der Mittelpunkt der Radien aller beliebigen Kreise und zugleich auch der gemeinsame Schnittpunkt aller Schenkel aller beliebigen Winkel ist, haben alle Winkel von > 0° bis 360° die (auch beliebig wählbare) immer gleichgroße Drittelsekante S, und die Drittelwinkel bilden mit diesen Drittelsekanten unter dem jeweiligen Kreisbogen mit dem Radius MR’ und dem Punkt M immer dem Dreieck MP1’P2’ drei einander kongruente Dreiecke. Durch diesen geometrisch verwirklichten Modus ist jeder Winkel durch drei geteilt. Im Viereck ABCD sind unendlich viele Winkel, aber jeder ist fehlerfrei durch drei geteilt.

Das Buch mit der umfassenden Darstellung dieser geometrischen Methode der Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal ist im Trigon Verlag Potsdam bereits im Jahr 2005 erschienen. In ihm wird diese Methode als Isokanten – Methode beschrieben.